2.3 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΣΧΟΛΙΟ

Για να λύσουμε ένα πρόβλημα, αφού το διαβάσουμε καλά, εντοπίζουμε τον άγνωστο και τον συμβολίζουμε με μία μεταβλητή. Με βάση τα δεδομένα του προβλήματος καταστρώνουμε την εξίσωση που περιγράφει το πρόβλημα και την λύνουμε.
Τέλος ελέγχουμε αν οι λύσεις που βρήκαμε ικανοποιούν τις απαιτήσεις του προβλήματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 .

Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου παραλληλόγραμμου διαφέρουν κατά 3cm. Αν το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = 108\ cm^2$, να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου .

Προτεινόμενη λύση

Αν x είναι η μικρότερη διάσταση, τότε με βάση το πρόβλημα η μεγαλύτερη διάσταση είναι $x + 3$ και επομένως το εμβαδόν του θα είναι

$$E = x(x + 3) \text{ οπότε}$$
$$108 = x^2 + 3x$$
$$x^2 + 3x - 108 = 0 \text{ με } \Delta = 441$$
$$\text{και ρίζες } x_1 = 9 \quad , \quad x_2 = -12$$

Επειδή το x παριστάνει μήκος, η ρίζα $x_2 = -12$ απορρίπτεται.
Άρα $x = 9$ και επομένως οι διαστάσεις είναι 9 cm και 12cm.

2.

Οι κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι $AB = x$ και $A\Gamma = 2x - 8$.
Αν η υποτείνουσα είναι $B\Gamma = 3x - 16$, να βρεθούν οι πλευρές του τριγώνου.

Προτεινόμενη λύση

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε $(3x - 16)^2 = x^2 + (2x - 8)^2$

$$9x^2 - 96x + 256 = x^2 + 4x^2 - 32x + 64$$
$$4x^2 - 64x + 192 = 0$$
$$x^2 - 16x + 48 = 0$$

$\Delta = 64$ και ρίζες $x_1 = 4$, $x_2 = 12$
Όταν $x = 4$ τότε $AB = 4$, $A\Gamma = 0$ και $B\Gamma = -4$, οπότε η τιμή $x = 4$ απορρίπτεται.
Όταν $x = 12$ τότε $AB = 12$, $A\Gamma = 16$ και $B\Gamma = 20$

3.

Να βρεθούν δύο διαδοχικοί ακέραιοι με άθροισμα τετραγώνων 85.

Προτεινόμενη λύση

Έστω x και $x + 1$ οι διαδοχικοί ακέραιοι.

Τότε $x^2 + (x + 1)^2 = 85$

$x^2 + x^2 + 2x + 1 - 85 = 0$

$2x^2 + 2x - 84 = 0$

$x^2 + x - 42 = 0$ με $\Delta = 169$ και ρίζες $x_1 = -7$, $x_2 = 6$

Όταν $x = -7$, τότε οι διαδοχικοί ακέραιοι είναι οι -7 και -6

Όταν $x = 6$ τότε οι διαδοχικοί ακέραιοι είναι οι 6 και 7

4.

Να βρεθεί ένας αριθμός του οποίου το τετράγωνο είναι μεγαλύτερο κατά 27 από το άθροισμα των $\frac{2}{3}$ και των $\frac{5}{6}$ του αριθμού .

Προτεινόμενη λύση

Έστω x ο ζητούμενος αριθμός. Τότε $x^2 - 27 = \frac{2}{3}x + \frac{5}{6}x$

$6x^2 - 162 = 4x + 5x$

$6x^2 - 9x - 162 = 0$

$2x^2 - 3x - 54 = 0$

$\Delta = 441$ και ρίζες $x_1 = 6$, $x_2 = -\frac{9}{2}$

Δεκτές και οι δύο τιμές.

5.

Να χωριστεί ο αριθμός 20 σε δύο προσθετέους, έτσι ώστε το διπλάσιο τετράγωνο του πρώτου και το πενταπλάσιο τετράγωνο του δεύτερου να έχουν άθροισμα 608.

Προτεινόμενη λύση

Έστω x ο ένας προσθετέος. Τότε ο άλλος είναι $20 - x$.

Με βάση το πρόβλημα έχουμε $2x^2 + 5(20 - x)^2 = 608$

$2x^2 + 5(400 - 40x + x^2) = 608$

$2x^2 + 2000 - 200x + 5x^2 - 608 = 0$

$7x^2 - 200x + 1392 = 0$

$\Delta = 1024$ και ρίζες $x_1 = 12$, $x_2 = \frac{116}{7}$

Όταν $x = 12$, τότε οι δύο προσθετέοι είναι το 12 και το 8

Όταν $x = \frac{116}{7}$, τότε οι δύο προσθετέοι είναι $\frac{116}{7}$ και $\frac{24}{7}$

6.

Να βρεθεί ένας αριθμός του οποίου το άθροισμα των ψηφίων του είναι 7, ενώ το άθροισμα των τετραγώνων των ψηφίων του είναι 29.

Προτεινόμενη λύση

Αν x είναι το ένα ψηφίο τότε το άλλο είναι 7 – x.

Με βάση το πρόβλημα έχουμε $x^2 + (7 - x)^2 = 29$

$$x^2 + 49 - 14x + x^2 - 29 = 0$$
$$2x^2 - 14x + 20 = 0$$
$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$\Delta = 9$ και ρίζες $x_1 = 5$, $x_2 = 2$

Όταν $x = 5$ είναι το ένα ψηφίο, τότε το άλλο είναι το $7 - 5 = 2$ και ο αριθμός είναι το 52

Όταν $x = 2$ είναι το ένα ψηφίο, τότε το άλλο είναι το $7 - 2 = 5$ και ο αριθμός είναι το 25

7.

Το ύψος ενός τριγώνου είναι κατά 4cm μικρότερο από την βάση του. Αν το εμβαδό του τριγώνου είναι 30 cm^2, να βρείτε το ύψος και τη βάση του τριγώνου.

Προτεινόμενη λύση

Έστω x το μήκος της βάσης. Τότε το ύψος είναι $x - 4$ και το εμβαδόν $\frac{x(x-4)}{2}$

Με βάση το πρόβλημα θα είναι $30 = \frac{x(x-4)}{2}$

$$60 = x^2 - 4x$$
$$x^2 - 4x - 60 = 0$$

$\Delta = 256$ και ρίζες $x_1 = -6$, $x_2 = 10$

Από αυτές η $x = -6$ απορρίπτεται, αφού το x δηλώνει μήκος.

Επομένως η βάση του τριγώνου είναι 10 και το ύψος 6

8.

Κεφάλαιο 20000 € κατατέθηκε στην τράπεζα με ανατοκισμό ανά έτος και ύστερα από 2 χρόνια έγινε μαζί με τους τόκους 26450 €. Να βρεθεί το επιτόκιο.

Προτεινόμενη λύση

Έστω ότι το επιτόκιο ήταν x % .

Τότε ο τόκος του πρώτου χρόνου ήταν $\frac{x}{100}\cdot 20000 = 200x$

και το κεφάλαιο στην αρχή του δεύτερου χρόνου ήταν $20000 + 200x$.

Ο τόκος του δεύτερου χρόνου ήταν $\frac{x}{100}\cdot(20000+200x) = 200x + 2x^2$

Και το κεφάλαιο στο τέλος του δεύτερου χρόνου ήταν $20000 + 200x + 200x + 2x^2$.

Αυτό το ποσό σύμφωνα με το πρόβλημα είναι 26450.

Επομένως $20000 + 200x + 200x + 2x^2 = 26450$

$2x^2 + 400x - 6450 = 0$

$x^2 + 200x - 3225 = 0$

$\Delta = 52900$ και ρίζες $x_1 = -215$, $x_2 = 15$

Από αυτές η αρνητική απορρίπτεται επειδή το x είναι επιτόκιο.

Οπότε το επιτόκιο ήταν 15%

9.

Ένα σώμα βρίσκεται στην κορυφή μιας χαράδρας βάθους 300 m. Πόσος χρόνος απαιτείται για να φτάσει το σώμα στο τέλος της χαράδρας, αν το σώμα

α) πέσει από την κορυφή

β) εκσφενδονιστεί προς τα κάτω με αρχική ταχύτητα 50 m/sec

Δίνεται ότι $g = 10m / sec^2$

Προτεινόμενη λύση

α)

Στην ελεύθερη πτώση το διάστημα που διανύει ένα σώμα σε χρόνο t είναι

$S = \frac{1}{2}gt^2$ άρα $300 = \frac{1}{2}\cdot 10\, t^2$

$t^2 = 60$

$t = \sqrt{60}$ ή $t = -\sqrt{60}$

Από αυτές η αρνητική τιμή απορρίπτεται δεδομένου ότι το t δηλώνει χρόνο.

Άρα $t = \sqrt{60} = 7{,}75$ sec περίπου

β)

Αν το σώμα έχει αρχική ταχύτητα υ_o, τότε $S = \upsilon_o t + \frac{1}{2}gt^2$

$300 = 50t + \frac{1}{2}\cdot 10\, t^2$

$5t^2 + 50t - 300 = 0$

$t^2 + 10t - 60 = 0$

$\Delta = 340$ και ρίζες $t_1 = -14{,}2$, $t_2 = 4{,}22$

Από αυτές δεκτή είναι η $t_2 = 4{,}22$ sec

10.

Μία επιχείρηση θα μοιράσει 4000 € σε 90 εργαζόμενούς της , άνδρες και γυναίκες. Αν κάθε άνδρας πάρει τόσα ευρώ όσα είναι οι γυναίκες και κάθε γυναίκα πάρει τόσα ευρώ όσοι είναι οι άνδρες , να βρείτε πόσοι είναι οι άνδρες και πόσες οι γυναίκες.

Προτεινόμενη λύση

Έστω ότι οι άνδρες είναι x , τότε οι γυναίκες θα είναι $90 - x$.

Τα χρήματα που θα πάρουν οι άνδρες είναι $x(90 - x)$

και τα χρήματα που θα πάρουν οι γυναίκες είναι $(90 - x)x$.

Με βάση το πρόβλημα θα έχουμε

$$x(90 - x) + (90 - x)x = 4000$$
$$2x(90 - x) = 4000$$
$$x(90 - x) = 2000$$
$$x^2 - 90x + 2000 = 0$$

$\Delta = 100$ και ρίζες $x_1 = 50$, $x_2 = 40$

Όταν $x = 50$ τότε οι άνδρες είναι 50 και οι γυναίκες 40

Όταν $x = 40$ τότε οι άνδρες είναι 40 και οι γυναίκες 50

.